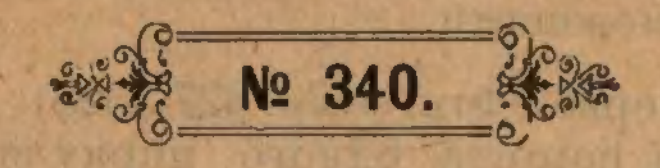
XXIX Сем. № 4.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

28 Февраля



№ 340.

1903 г.

О средствахъ, достаточныхъ для построенія геометрическихъ задачъ второй степени.

Д. Шора въ Геттингенѣ.

*(Продолженіе *).*

14. Къ сожалѣнію, проблемы, о которыхъ идетъ рѣчь въ настоящей статьѣ, не пользуются широкой извѣстностью среди преподавателей элементарной математики, несмотря на то, что онѣ даютъ интересный матеріалъ для упражненій въ геометрическихъ построеніяхъ. Такъ, хотя вопросъ о построеніяхъ при помощи нераскрывающагося циркуля, какъ видно изъ предыдущаго параграфа, былъ въ положительномъ смыслѣ разрѣшенъ еще въ XVI-омъ вѣкѣ, — въ № 1 „Журнала Элементарной Математики" за $188^5/_6$ годъ мы находимъ статью г. Шнейдера [30]), въ которой дано, очевидно, вполнѣ независимое рѣшеніе этой проблемы.

15 Обратимся теперь къ *построеніямъ при помощи линейки, если въ плоскости чертежа построена нѣкоторая окружность и центръ ея.*

*) См. № 333 „Вѣстника".

[30]) А. Шнейдеръ, *„Рѣшеніе геометрическихъ задачъ при помощи линейки и одного раствора циркуля"*.

Что при этихъ средствахъ мы въ состоянiи построить любую задачу второй степени, доказалъ впервые Poncelet въ 1822 году [31]). Вскорѣ послѣ того, въ 1833 году Jacob Steiner опубликовалъ небольшое сочиненie [32]), спецiально посвященное такого рода построенiямъ; это сочиненie носитъ вполнѣ элементарный характеръ, и мы рекомендуемъ его всякому, кто интересуется геометрическими построенiями. Оба эти геометра были приведены къ постановкѣ этой проблемы своими изслѣдованiями проективныхъ свойствъ фигуръ; Steiner'у при этомъ всецѣло принадлежитъ заслуга подробной разработки этихъ построенiй, тогда какъ Poncelet удовольствовался краткимъ доказательствомъ ихъ возможности.

16. Въ главѣ первой (см. №№ 327, 328) была изложена теорiя построенiй при помощи одного циркуля; при этомъ руководящею идеей служилъ способъ преобразованiя обратными радiусами. Также и въ теорiи построенiй при посредствѣ линейки, если въ плоскости чертежа построена окружность и ея центръ, доминируетъ одна общая идея, а именно, *способъ преобразованiя посредствомъ подобiя.* При преобразованiи обратными радiусами неизмѣннымъ оставалась окружность; ея внутренняя часть преобразовывалась во внѣшнюю, внѣшняя же—во внутреннюю. *Плоскость какъ бы выворачивалась на изнанку*, если позволено будетъ употребить такое уподобленiе. Теперь, производя преобразованiе плоскости при посредствѣ подобiя, мы *какъ бы растягиваемъ ее равномѣрно по всѣмъ направленiямъ*, оставляя неизмѣнной, неподвижной только одну точку—*центръ подобiя.* Если укрѣпить листъ бумаги, на которомъ выполненъ какой-либо геометрическiй чертежъ, въ любой изъ его точекъ и нагрѣть его равномѣрно, то всѣ фигуры чертежа преобразуются по методу подобiя; при чемъ центромъ подобiя новыхъ фигуръ и прежнихъ будетъ служить неподвижно закрѣпленная точка.

17. Чтобы доказать, что всѣ задачи второй степени могутъ быть построены какими-либо ограниченными средствами, достаточно вывести построенiе основныхъ постулатовъ (см. стран. 49—50, въ № 327); при этомъ, поскольку рѣчь идетъ о построенiи точекъ, существенное значенiе имѣютъ только постулаты 3), 4) и 5). Въ нашемъ случаѣ, при построенiяхъ при помощи линейки, если въ плоскости чертежа начерчена окружность и ея центръ, постулатъ 1), равно какъ и 3), остаются безъ измѣненiя. Вмѣсто 2), мы принимаемъ (см. стран. 198, № 333):

---

[31]) Poncelet, „*Traité des propriétés projectives des figures*"; II éd.; 1865, tome 1, p. 181—184.

[32]) J. Steiner, „*Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichtsanstalten und zur praktischen Benutzung*"; мы рекомендуемъ читателямъ „Вѣстн." новое изданiе: Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, № 60; Leipzig, 1895.

$2a^0$) *въ плоскости чертежа построена вокругъ нѣкоторой точки C', какъ центра, окружность*; никакая другая окружность не можетъ быть построена.

Вмѣсто 4) мы принимаемъ теперь:

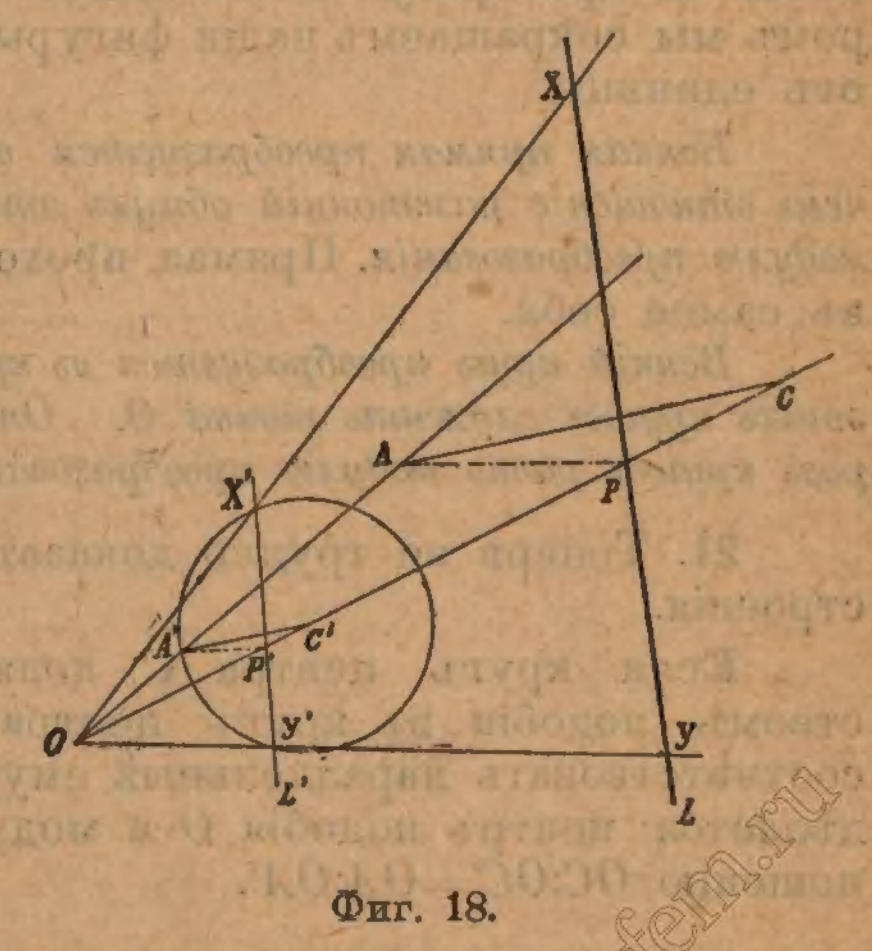
4^0) *мы въ состоянiи строить точки пересѣченiя всякой построенной прямой съ нашимъ кругомъ центра C', если эта прямая соединяетъ внутреннiя его точки съ внѣшними.*

Постулатъ 2) изъ принятыхъ постулатовъ, понятно, выведенъ быть не можетъ, чѣмъ группа этихъ построенiй и отличается отъ группы построенiй при неограниченномъ пользованiи обоими инструментами. Но это различiе, какъ уже сказано, не существенно, коль скоро рѣчь идетъ о построенiи точекъ. Намъ остается вывести построенiе постулатовъ 4) и 5).

18. Прежде всего, проведя два любыхъ дiаметра нашего круга, мы получаемъ, въ точкахъ ихъ пересѣченiя съ окружностью его, четыре вершины нѣкотораго прямоугольника. Слѣдовательно, на основанiи доказаннаго въ параграфѣ **10** (см. № 333, стран. 197), мы въ состоянiи при помощи одной только линейки проводить параллельныя къ любой построенной прямой.

19. Теперь мы въ состоянiи вывести постулатъ 4); а именно, *построить пересѣченiе любой прямой съ окружностью, центръ и одна точка периферiи которой даны.*

Пусть C—центръ нѣкоторой окружности, A—точка ея периферiи, L—прямая, пересѣченiе которой съ этой окружностью мы хотимъ построить (см. фиг. 18); пусть далѣе C' — центръ окружности, построенной въ плоскости чертежа. Проведемъ черезъ C' радiусъ $C'A'$, параллельный прямой CA и одинаковаго съ ней направленiя. Если мы соединимъ теперь прямыми точки C и C' съ одной стороны, съ другой стороны A и A', то точка O пересѣченiя прямыхъ CC' и AA' будетъ служить (внѣшнимъ) центромъ подобiя круговъ C и C'.



Фиг. 18.

Пусть P будетъ точка пересѣченiя прямой L съ прямой CC'; раздѣлимъ OP въ отношенiи $OA':A'A$. Для этого достаточно изъ точки A' провести параллельную къ прямой AP; точка P' ея пересѣченiя съ CC' раздѣлитъ OP такъ, что $OP:OP = OA:OA'$. Проводимъ теперь черезъ P' прямую $L'\|L$. Пусть L' пересѣкаетъ окружность центра C' въ точкахъ X' и Y', тогда прямыя OX' и OY' пересѣкутъ прямую L въ точкахъ X и

Y, которыя и *суть искомыя точки пересѣченія окружности C съ прямой L* [33]).

Не трудно было бы доказать это, слѣдуя шагъ за шагомъ ходу нашего построенія. Но мы хотимъ обратить вниманіе читателя на принципъ его. Оно есть не что иное, какъ примѣненіе преобразованія посредствомъ подобія. Точка O служитъ *центромъ подобія; всѣ точки, снабженныя значкомъ ', суть изображенія точекъ, обозначенныхъ той же буквой, но безъ этого значка.* Мы выбрали наше преобразованіе такъ, что кругъ, котораго только центръ и точка периферіи намъ извѣстны, преобразовался въ кругъ, полностью построенный въ плоскости чертежа. Въ этомъ и состоитъ цѣлесообразность примѣненія преобразованія посредствомъ подобія.

20. Мы приводимъ здѣсь безъ доказательства рядъ теоремъ изъ теоріи преобразованій посредствомъ подобія, которыя дадутъ намъ возможность въ двухъ словахъ доказать справедливость построенія предыдущаго параграфа. Доказательство этихъ предложеній читателю не трудно будетъ найти самому, а кромѣ того, они приведены въ книгахъ, упомянутыхъ въ примѣчаніи [14]) (см. № 327, стран. 55).

При преобразованіи посредствомъ подобія, каждой точкѣ первоначальной фигуры соотвѣтствуетъ одна и только одна точка новой.

Центръ подобія соотвѣтствуетъ самому себѣ. Никакая другая точка не преобразуется въ самое себя, если отношеніе, въ которомъ мы сокращаемъ наши фигуры *(модуль преобразованія)*, отлично отъ единицы.

Всякая прямая преобразуется въ прямую ей параллельную, причемъ отношеніе разстояній обѣихъ этихъ прямыхъ отъ центра O равно модулю преобразованія. Прямая, проходящая черезъ O, преобразуется въ самое себя.

Всякій кругъ преобразуется въ кругъ, и внѣшнимъ центромъ подобія этихъ круговъ служитъ точка O. Отношеніе разстояній O отъ центровъ круговъ равно модулю преобразованія.

21. Теперь не трудно доказать справедливость нашего построенія.

Если кругъ центра C долженъ преобразоваться посредствомъ подобія въ кругъ центра C', то радіусу CA долженъ соотвѣтствовать параллельный ему $C'A'$. По этимъ даннымъ опредѣляется центръ подобія O и модуль преобразованія, равный отношенію $OC:OC'=OA:OA'$.

---

[33]) Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ это построеніе необходимо модифицировать. Такъ, если L проходитъ черезъ O, то достаточно провести черезъ C прямыя $\| C'X'$ и $C'Y'$ (и одинаковаго съ нимъ направленія) до встрѣчи съ L въ точкахъ X и Y. Если, далѣе, C совпадаетъ съ прямой $C'C$, то, соединивъ концы діаметра OC' съ точкой A' прямыми, проводимъ изъ A къ нимъ параллельныя, которыя и пересѣкутъ OC въ искомыхъ точкахъ. Наконецъ, можетъ еще случиться, что $L \| CC'$; предоставляемъ читателю самому найти подходящее для этого случая измѣненіе нашего построенія.

Теперь ясно, что прямая L' есть не что иное, какъ изображенiе прямой L, а слѣдовательно, точки X' и $У'$ служатъ изображенiями искомыхъ точекъ пересѣченiя X и $У$ окружности C съ прямой L.

22. Намъ остается вывести постулатъ 5), т. е. найти построенiе точекъ пересѣченiя двухъ окружностей, каждая изъ которыхъ задана своимъ центромъ и одною изъ точекъ периферiи. Для этого мы построимъ ихъ общую сѣкущую, т. е. сѣкущую, проходящую черезъ точки ихъ пересѣченiя. Построивъ затѣмъ, какъ указано въ параграфѣ **19**, точки ея пересѣченiя съ одной изъ окружностей, мы получимъ искомыя точки пересѣченiя обѣихъ окружностей.

Построенiе же общей сѣкущей двухъ круговъ основано на слѣдующихъ ея свойствахъ, которыя, въ виду элементарности ихъ, мы приводимъ безъ доказательства.

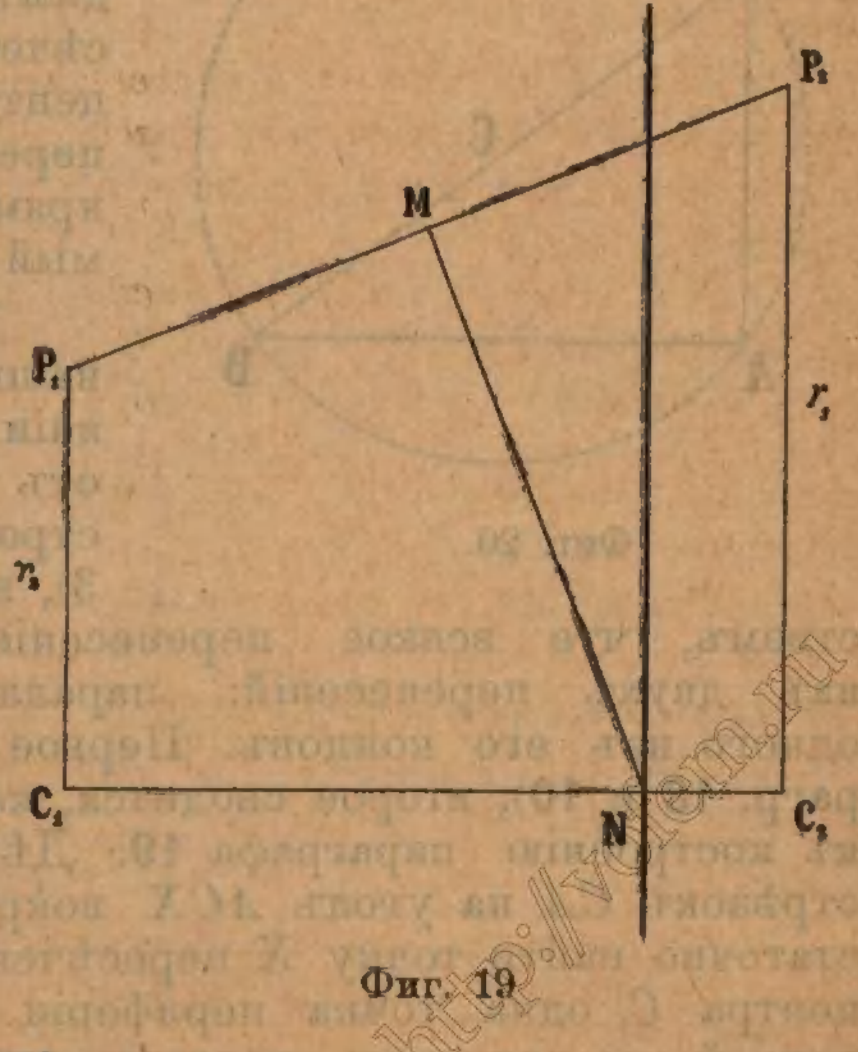
Она перпендикулярна къ линiи центровъ и представляетъ собой геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, разность квадратовъ разстоянiй которыхъ отъ центровъ обоихъ круговъ равна разности квадратовъ ихъ радiусовъ.

Это послѣднее геометрическое мѣсто вообще, т. е. независимо отъ того, пересѣкаются ли окружности или нѣтъ, носитъ названiе *радикальной оси* обоихъ круговъ. Такъ что оба свойства общей сѣкущей можно короче формулировать такъ:

Общая сѣкущая двухъ круговъ есть ихъ радикальная ось.

Мы приводимъ здѣсь построенiе радикальной оси двухъ круговъ, которое можетъ быть выполнено нашими средствами; этимъ построенiемъ мы воспользуемся, кромѣ того, въ слѣдующей главѣ.

Пусть C_1 и C_2—центры данныхъ окружностей (см. фиг. 19). Въ точкахъ C_1 и C_2 возставимъ къ прямой C_1C_2 перпендикуляры, и отложимъ на первомъ r_2, радiусъ второй, на второмъ—радiусъ первой окружности—r_1. Концы этихъ перпендикуляровъ P_1 и P_2 соединимъ прямой и раздѣлимъ ее въ точкѣ M пополамъ. Перпендикуляръ, возставленный въ этой точкѣ къ прямой P_1P_2, встрѣтитъ прямую C_1C_2 въ точкѣ N такъ, что



Фиг. 19

$$\overline{NC_1}^2 - \overline{NC_2}^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

Дѣйствительно, изъ треугольниковъ NP_1C_1 и NP_2C_2 заключаемъ, что

$$\overline{NC_1}^2 - \overline{NC_2}^2 = (\overline{NP_1}^2 - r_2^2) - (\overline{NP_2}^2 - r_1^2) =$$
$$= r_1^2 - r_2^2, \text{ такъ какъ } NP_1 = NP_2.$$

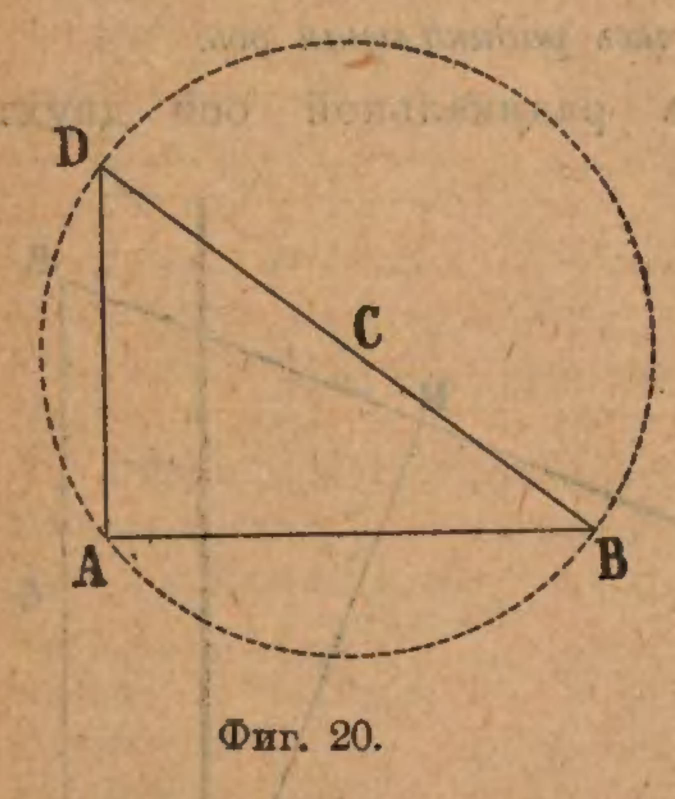
Если мы теперь въ точкѣ N возставимъ къ линіи центровъ перпендикуляръ, то радикальная ось построена.

Дѣйствительно, разность квадратовъ разстояній любой точки этого перпендикуляра отъ C_1 и C_2 равна $r_1^2 - r_2^2$.

23. Мы должны теперь доказать, что построеніе, приведенное въ предыдущемъ параграфѣ, выполнимо нашими ограниченными средствами. Это построеніе состоитъ изъ слѣдующихъ частей: 1) дѣленіе прямой P_1P_2 на двѣ части, 2) возстановленіе четырехъ перпендикуляровъ и, наконецъ, 3) откладываніе отрѣзковъ r_1 и r_2 на соотвѣтствующихъ перпендикулярахъ C_2P_2 и C_1P_1.

Построеніе 1), т. е. дѣленіе построеннаго отрѣзка пополамъ, производится нашими средствами, какъ показано въ параграфахъ **18** (см. стран. 75) и **10** (см. № 333, стран. 195—197).

Чтобы возстановить изъ нѣкоторой точки прямой къ ней перпендикуляръ (построеніе 2), можно воспользоваться слѣдующимъ простымъ пріемомъ. Пусть L данная прямая, A точка на ней, въ которой требуется возставить перпендикуляръ (см. фиг. 20). Возьмемъ въ плоскости любую точку C, и пусть она будетъ центромъ нѣкоторой окружности, проходящей черезъ A. Затѣмъ двукратнымъ примѣненіемъ пріема, описаннаго въ параграфѣ **19**, находимъ сперва вторую точку B пересѣченія прямой L съ окружностью центра C, а затѣмъ вторую точку D пересѣченія этой же окружности съ прямой BC. Прямая DA и есть искомый перпендикуляръ.



Фиг. 20.

Наконецъ, чтобы доказать, что нашими средствами мы въ состояніи откладывать данные отрѣзки отъ построенныхъ точекъ на построенныхъ прямыхъ (построеніе 3), воспользуемся тѣмъ обстоятельствомъ, что всякое перенесеніе отрѣзка можно составить изъ двухъ перенесеній: параллельнаго и вращенія вокругъ одного изъ его концовъ. Первое мы можемъ строить (см. парагр. **18** и **10**); второе сводится, какъ частный случай къ общему, къ построенію параграфа **19**. Дѣйствительно, чтобы повернуть отрѣзокъ CA на уголъ ACX вокругъ точки C (см. фиг. 18), достаточно найти точку X пересѣченія прямой CX съ окружностью центра C, одна точка периферіи которой A построена. Этотъ случай мы получимъ, когда прямая L параграфа **19** будетъ проходить черезъ точку C.

Этимъ мы доказали, что построеніе радикальной оси, данное въ предыдущемъ параграфѣ, выполнимо нашими средствами.

24. Итакъ, мы доказали, во-первыхъ, что постулатъ 4) можетъ быть построенъ при помощи линейки, если въ плоскости чертежа начерчена нѣкоторая окружность и центръ ея; во-вторыхъ, въ параграфахъ **22** и **23** показано, что и постулатъ 5) можетъ быть вычерченъ этими средствами.

Этимъ доказано, что всякая задача второй степени можетъ быть построена линейкой, если въ плоскости чертежа начерченъ кругъ и центръ его.

25. Изъ разсужденій послѣднихъ параграфовъ не трудно вывести также, что постулатъ 5) вообще, т. е. независимо отъ того, идетъ ли рѣчь о построеніяхъ Poncelet—Steiner'а или о какихъ-либо другихъ, есть слѣдствіе постулатовъ 3) и 4).

Дѣйствительно, коль скоро постулаты 3) и 4) даны, мы въ состояніи построить прямоугольникъ (на основаніи 4) строимъ точки пересѣченія любыхъ двухъ діаметровъ произвольнаго круга съ его периферіей), а затѣмъ произвести построеніе радикальной оси всякихъ двухъ круговъ.

Этотъ результатъ интересенъ въ томъ отношеніи, что въ главѣ I было показано обратное; а именно, постулаты 3) и 4) были выведены изъ 5).

Кромѣ того, этимъ результатомъ мы воспользуемся въ слѣдующей главѣ.

26. Прежде чѣмъ оставить вопросъ о построеніяхъ Poncelet—Steiner'а, я считаю необходимымъ указать съ особеннымъ удареніемъ на то обстоятельство, что для построенія задачъ второй степени отнюдь не достаточно располагать построеннымъ въ плоскости чертежа кругомъ, *если центръ его неизвѣстенъ.* Въ такомъ случаѣ при помощи линейки мы могли бы строить только задачи первой степени. Съ другой стороны, центръ этотъ можетъ быть замѣненъ любымъ параллелограммомъ, построеннымъ въ плоскости чертежа; тогда, какъ не трудно видѣть, мы можемъ линейкой строить всякую задачу второй степени.

Центромъ нашего круга мы пользуемся при всѣхъ построеніяхъ—непосредственно, либо косвеннымъ образомъ; и всякое построеніе, въ которомъ выполнены также всѣ вспомогательныя задачи, содержитъ цѣлый рядъ прямыхъ, проходящихъ черезъ этотъ центръ.

Я обратилъ вниманіе читателей на этотъ пунктъ потому, что A. Adler, содержаніе работы котораго изложено въ главѣ I, не принявъ этого обстоятельства во вниманіе, дѣлаетъ слѣдующій ошибочный выводъ [34]).

[34]) Это тѣмъ болѣе странно, что въ другомъ мѣстѣ, въ статьѣ, цитированной ниже, въ слѣдующей главѣ, Adler самъ указываетъ на существенное значеніе центра построенной окружности при построеніяхъ Poncelet-Steiner'а.

Пользуясь пріемами, указанными въ параграфахъ **3**, **4** и **7** (см. № 328, стран. 74—77 и 79—80), онъ преобразуетъ чертежъ α, представляющій собой рѣшеніе нѣкоторой любой задачи второй степени по способу Poncelet-Steiner'а, при помощи обратныхъ радіусовъ, въ единственномъ кругѣ этого чертежа. Это преобразованіе можно, на основаніи параграфовъ **3** и **4**, произвести однимъ циркулемъ, при чемъ Adler замѣчаетъ, что всѣ круги этихъ построеній проходятъ черезъ центръ C даннаго круга. Такъ какъ, далѣе, *всѣ* круги фигуры α', полученныя отъ преобразованія прямыхъ фигуры α, проходятъ также черезъ C, то Adler заключаетъ:

Всякая задача второй степени можетъ быть построена однимъ циркулемъ, *при чемъ можно поставить еще требованіе, чтобы всѣ круги чертежа Macheroni, за исключеніемъ одного, проходили черезъ точку C, служащую центромъ этого послѣдняго.*

Это заключеніе представляетъ собой *весьма грубую ошибку.* Вѣдь чертежъ α Poncelet-Steiner'а содержитъ прямыя, проходящія черезъ центръ круга C, а слѣдовательно, полученный преобразованіемъ обратными радіусами чертежъ α' не будетъ вовсе чертежемъ Mascheroni, т. е. онъ будетъ содержать, кромѣ круговъ, и прямыя линіи: прямыя, проходящія черезъ центръ круга C, преобразуются въ прямыя (см. *примѣчаніе* къ параграфу **4**, стран. 77).

27. Мы уже упомянули выше (см. параграфъ **10**, стран. 197, № 333), что, располагая одной линейкой, мы не въ состояніи производить самыхъ простыхъ геометрическихъ построеній. Даже, если намъ дана возможность проводить къ построеннымъ прямымъ черезъ точки внѣ ихъ параллельныя, какъ, напр., если въ плоскости чертежа начерченъ параллелограммъ, то и тогда мы получаемъ возможность при помощи линейки производить на этихъ прямыхъ только раціональныя операціи и переносить отрѣзки только параллельно ихъ первоначальному положенію. Это значитъ, что, если заданные въ условіи задачи отрѣзки лежатъ на непараллельныхъ другъ другу прямыхъ, то мы не можемъ, вообще говоря, ни складывать ихъ, ни вычитать, ни находить четвертой пропорціональной. Это становится возможнымъ только въ томъ случаѣ, если всѣ отрѣзки, которые должны быть соединены другъ съ другомъ какими бы то ни было раціональными операціями, лежатъ на параллельныхъ между собой прямыхъ.

Между тѣмъ, въ большинствѣ геометрическихъ задачъ мы принуждены пользоваться перенесеніемъ отрѣзковъ не только параллельно ихъ первоначальному положенію. Соотвѣтственно этому, возникаетъ вопросъ: *не достаточно ли для построенія задачъ второй степени къ постулатамъ 1) и 3)* (см. № 327, стран. 49) *прибавить еще одинъ постулатъ, который давалъ бы намъ возможность переносить отрѣзки изъ ихъ первоначальнаго положенія на любую другую прямую?*

Другими словами, не достаточно ли, кромѣ линейки, вос-

пользоваться еще особымъ инструментомъ—*переносителемъ отрѣзковъ?* Такимъ инструментомъ можетъ намъ служить та же линейка, на которой карандашомъ, скажемъ, отмѣчаются данные или построенные отрѣзки и такимъ образомъ откладываются на прямыхъ любого направленія.

Этотъ вопросъ былъ изслѣдованъ D. Hilbert'омъ въ его классическомъ сочиненіи „*Grundlagen der Geometrie*" [35]).

Оказывается, что этихъ средствъ, т. е. линейки и переносителя отрѣзковъ, *не* достаточно для построенія всѣхъ задачъ второй степени. Тѣмъ не менѣе, большое число ихъ, составляющее особую подгруппу задачъ второй степени, можетъ быть построено такимъ образомъ.

Если рѣшать геометрическую задачу алгебраическимъ методомъ, то, какъ извѣстно, построеніе всякой задачи второй степени сводится къ конечному ряду элементарныхъ построеній, соотвѣтствующихъ основнымъ ариѳметическимъ операціямъ: 1) сложенію съ вычитаніемъ, 2) нахожденію четвертой пропорціональной (т. е. умноженію и дѣленію) и 3) извлеченію квадратнаго корня.

Первое непосредственно производится нашимъ *переносителемъ отрѣзковъ*.

Для второго, т. е. чтобы строить четвертую пропорціональную, необходимо, кромѣ того, умѣть проводить параллельныя. Что для этого нашихъ средствъ достаточно, очевидно изъ того, что мы можемъ ими построить параллелограммъ. Дѣйствительно, отложивъ на двухъ любыхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ любую точку O, по каждую ея сторону, одинъ и тотъ же отрѣзокъ $OA=OC=OB=OD$, получаемъ прямоугольникъ $ABCD$.

Остается извлеченіе квадратнаго корня. При этомъ слѣдуетъ различать два случая, которымъ соотвѣтствуютъ два существенно различныхъ пріема геометрическаго построенія. Во-первыхъ, подкоренное количество можетъ представлять собой *сумму* двухъ квадратовъ или, при помощи раціональныхъ передѣлокъ, приводиться къ таковой. Построеніе этого корня есть не что иное, какъ построеніе гипотенузы прямоугольнаго треугольника по его двумъ катетамъ. Для этого построенія достаточно располагать, кромѣ линейки и переносителя отрѣзковъ, еще начерченнымъ въ плоскости чертежа прямымъ угломъ. И мы, дѣйствительно, располагаемъ такимъ, такъ какъ построили прямоугольникъ $ABCD$. Поэтому мы можемъ производить нашими средствами операцію

$$\sqrt{a^2+b^2}.$$

Напротивъ того, другой еще возможный случай, *извлеченіе*

---

35) *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen*, I Th.; Leipzig, 1899; p. 78—88; сочиненіе Hilbert'a вышло также отдѣльнымъ изданіемъ. Кромѣ того, французскій переводъ его напечатанъ въ *Ann. de l'école normale*, tome 17, 1900; существуетъ и англійскій переводъ.

квадратнаго корня изъ разности двухъ квадратовъ

$$\sqrt{a^2 - b^2}$$

не поддается построенію по способу Hilbert'a,—или, что все равно, мы не въ состояніи производить при посредствѣ линейки и переносителя отрѣзковъ построенія катета по гипотенузѣ и другому катету,—или, наконецъ, еще иначе: мы не можемъ находить средней пропорціональной, ибо

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a-b)(a+b)}.$$

Намъ пришлось бы сильно отклониться отъ темы настоящей статьи, если бы мы захотѣли доказать послѣднее утвержденіе. Кромѣ того, Hilbert'овы построенія сами по себѣ не имѣютъ непосредственнаго отношенія къ разбираемому нами вопросу. Они интересны для насъ, главнымъ образомъ, потому, что на нихъ снова можно показать, какъ могутъ быть ограничены посылки, изъ которыхъ выводятся геометрическія построенія. И эти ограниченія представляютъ собой полную аналогію того, что изложено въ этой главѣ относительно задачъ второй степени.

Достаточно будетъ указать, что это утвержденіе — невозможность построенія посредствомъ линейки и переносителя отрѣзковъ $\sqrt{a^2 - b^2}$ — доказывается по тому же методу, которымъ показана невозможность трисекціи угла и т. п. при помощи циркуля и линейки.

Итакъ, *группа задачъ второй степени содержитъ, какъ подгруппу, совокупность всѣхъ задачъ, которыя могутъ быть построены по способу Hilbert'a. Къ этой подгруппѣ относятся тѣ и только тѣ задачи, алгебраическое рѣшеніе которыхъ приводитъ къ конечному ряду раціональныхъ операцій и извлеченій квадратныхъ корней изъ суммы квадратовъ* [36]).

28. Мы видѣли, что при посредствѣ линейки и неизмѣннаго раствора циркуля можно строить всѣ задачи второй степени; если подвергнуть употребленіе циркуля такому ограниченію, то группа доступныхъ построенію задачъ совершенно не мѣняется. Подобное же ограниченіе употребленія переносителя отрѣзковъ не мѣняетъ объема подгруппы задачъ Hilbert'a. *Для построенія этихъ задачъ достаточно, кромѣ линейки, располагать еще возможностью переносить съ одной любой прямой на другую нѣкоторый неизмѣнный отрѣзокъ.* Это было показано недавно Kürschák'омъ, профессоромъ въ Будапештѣ [37]).

Доказательство его такъ просто, что мы не приведемъ его здѣсь, а только укажемъ, что оно основано на проведеніи парал-

---

[36]) Болѣе подробно разобраны Hilbert'овы построенія въ Геттингенской докторской диссертаціи М. Фельдблюма, *Ueber elementar-geometrische Constructionsaufgaben*, Варшава 1899.

[37]) Kürschak, „*Das Streckenabtragen*", Math. Ann. **55**, 1902, p. 597.

лельныхъ. Мы докажемъ, напротивъ того, что употребленіе переносителя отрѣзковъ можетъ быть еще больше ограничено.

Подобно тому какъ всѣ задачи второй степени могутъ быть построены линейкой, коль скоро въ плоскости чертежа начерченъ кругъ и центръ его,—*мы можемъ строить линейкой всякую задачу подгруппы Hilbert'a, если намъ дана, кромѣ того, возможность вокругъ нѣкоторой неподвижной точки чертежа откладывать на любыхъ проходящихъ черезъ нее прямыхъ какой-нибудь неизмѣнный отрѣзокъ.*

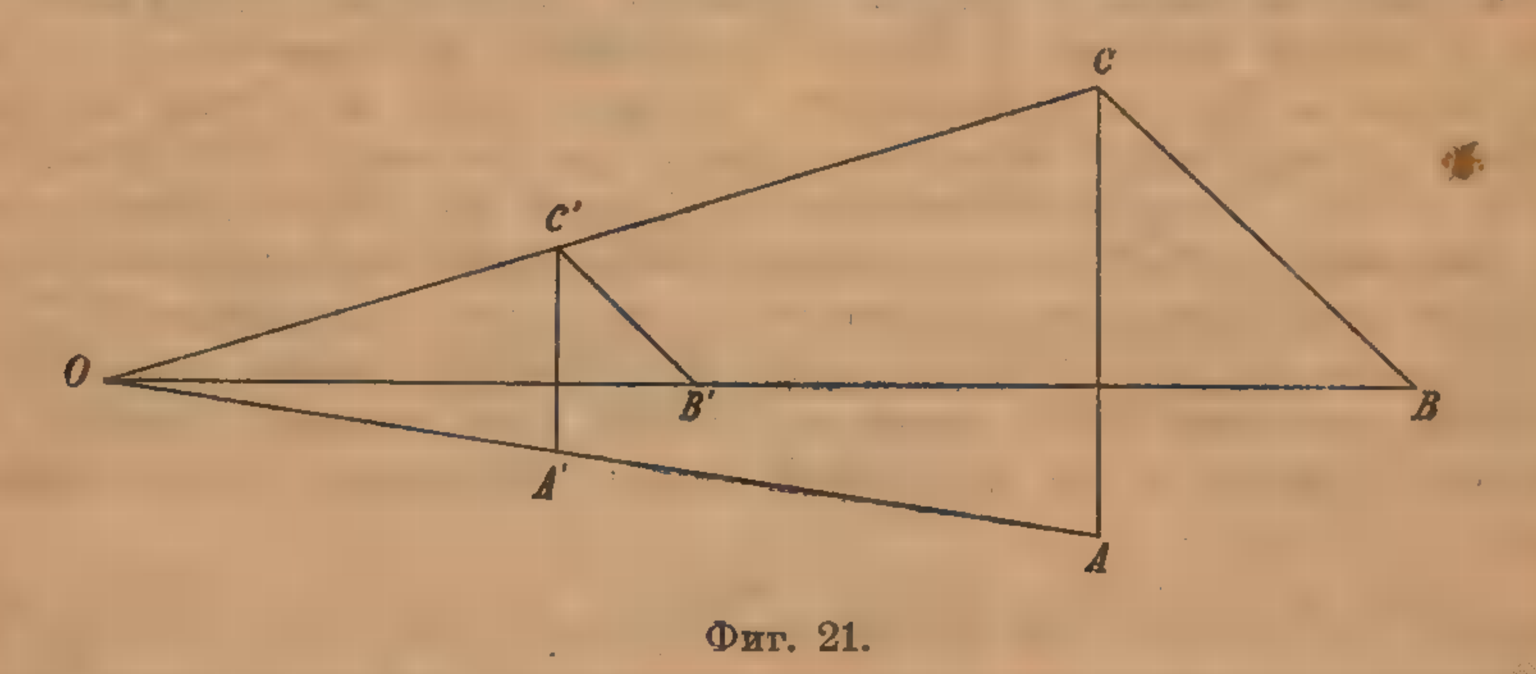
И дѣйствительно, мы можемъ построить вокругъ этой неизмѣнной точки, какъ точки пересѣченія діагоналей, прямоугольникъ, какъ это было указано въ предыдущемъ параграфѣ (см. стран. 81). При этомъ мы пользуемся, понятно, лишь нашимъ неизмѣннымъ отрѣзкомъ.

Если же въ плоскости чертежа построенъ параллелограммъ, то мы въ состояніи при помощи одной только линейки проводить черезъ любыя точки къ любымъ прямымъ параллельныя,—или, иначе говоря, мы можемъ при помощи одной линейки переносить отрѣзки, параллельно ихъ первоначальному направленію.

Чтобы доказать справедливость нашего утвержденія, намъ остается, слѣдовательно, найти, какъ нашими ограниченными средствами можно выполнять вращеніе отрѣзковъ вокругъ ихъ концовъ. Ибо, какъ уже сказано, всякое перенесеніе отрѣзка можно составить изъ двухъ—параллельнаго перенесенія и вращенія.

Чтобы доказать возможность вращенія, мы воспользуемся снова методомъ преобразованія посредствомъ подобія.

Пусть C' (см. фиг. 21)—неподвижная точка, отъ которой мы



Фиг. 21.

можемъ откладывать по любымъ направленіямъ неизмѣнный отрѣзокъ. Пусть далѣе CA отрѣзокъ, который требуется повернуть на уголъ ACB вокругъ C. Проведемъ черезъ C' прямую $\parallel CA$ и отложимъ, въ направленіи отъ C къ A, на этой прямой нашъ неизмѣнный отрѣзокъ $C'A'$. Соединивъ затѣмъ C съ C' и A съ A', получимъ въ пересѣченіи этихъ прямыхъ точку O, которая служитъ центромъ подобія нашего преобразованія; модулемъ его будетъ отношеніе $AC:A'C'$.

Проведемъ теперь изъ C' къ прямой CB параллельную и, отложивъ на ней въ направленіи отъ С къ B отрѣзокъ $C'B' = C'A'$, соединимъ O съ B'. Прямая OB' пересѣчетъ CB въ искомой точкѣ B такъ, что

$$CB = CA.$$

Итакъ, *мы показали, что при нашемъ ограниченномъ пользованіи переносителемъ отрѣзковъ мы можемъ всетаки выполнять всѣ функціи этого инструмента, т. е. переносить любые отрѣзки съ любыхъ прямыхъ на другія, если только въ нашемъ распоряженіи находится линейка.*

(Окончаніе слѣдуетъ).

Къ вопросу о колебаніи климата.

Въ послѣднихъ номерахъ „Метеорологическаго Вѣстника" профессоръ А. И. Воейковъ разбираетъ интересный, но очень трудный и мало разработанный вопросъ о причинахъ колебанія климата. Мы передадимъ въ видѣ реферата тѣ части статьи, которыя представляютъ интересъ и для физика.

Какъ извѣстно, имѣется много данныхъ за то, что въ промежуткѣ времени, геологически весьма близкомъ къ намъ, климатъ земного шара не оставался постояннымъ, а колебался,— хотя, можетъ быть, и не въ особенно широкихъ предѣлахъ, — между болѣе теплымъ и болѣе холоднымъ по сравненію съ теперешнимъ. На это указываютъ прежде всего ледники, занимавшіе въ Ледниковую эпоху площадь несравненно бо́льшую, нежели теперь, и простиравшіеся въ Европѣ до 50° сѣв. шир., въ С. Америкѣ до 40° с. ш., въ видѣ обширныхъ материковыхъ ледяныхъ покрововъ, сходныхъ съ покровомъ современной Гренландіи. Съ другой стороны, въ Эоценовую эпоху на сѣверѣ Европы климатъ былъ такой же, какой мы видимъ теперь въ южной Европѣ, а въ послѣдней былъ климатъ современныхъ намъ тропиковъ.

Для возможности распространенія ледниковъ до тѣхъ предѣловъ, до какихъ они дошли въ Ледниковую эпоху, вовсе не требуется особенно сильнаго пониженія температуры, какъ показали это Пенкъ и Брюкнеръ; для этого достаточно было бы, чтобы годовая температура сдѣлалась приблизительно на 5° ниже теперешней. Необходимо только, чтобы въ холодное время года выпадало достаточное количество осадковъ. При пониженіи температуры на 5° значительная часть весеннихъ и осеннихъ осадковъ въ умѣренныхъ широтахъ будетъ выпадать въ видѣ снѣга; вслѣдствіе обилія снѣга, таяніе его въ лѣтніе мѣсяцы будетъ затруднено. При такомъ допущеніи намъ станетъ понятнымъ гро-

мадное распространеніе когда-то ледниковъ въ тѣхъ мѣстностяхъ, гдѣ они существуютъ и теперь: въ Альпахъ, на Кавказѣ, на Пиринейскихъ и Скандинавскихъ горахъ.

Для низменностей мы имѣемъ слѣдующую схему распространенія ледниковъ въ ту эпоху:

Европа до меридіановъ средней Россіи: сравнительно обильные осадки въ холодные мѣсяцы, высокая температура лѣтомъ. Материковый ледяной покровъ до 50° с. ш.

Восточная Европейская Россія, Сибирь, кромѣ Амурскаго края: сравнительно мало осадковъ, преобладаютъ лѣтніе.

Туркестанъ, центральная Азія: очень мало осадковъ во всѣ времена года.

Восточная Азія, Амурскій край, Корея, Манджурія: обильные осадки, но лѣтомъ.

Во всѣхъ трехъ областяхъ отсутствіе материковаго ледяного покрова (кромѣ крайняго сѣвера).

Нагорья сѣв. Америки и степи до 98° з. д.: мало осадковъ, отсутствіе ледяного покрова.

Восточная сѣв. Америка до Атлантическаго океана: очень обильные осадки во всѣ времена года при низкой температурѣ. Материковый ледяной покровъ до 40° с. ш.

Изъ этой схемы видно, что непремѣннымъ условіемъ ледяного покрова является обиліе осадковъ въ холодное время года; легко понять, что даже небольшое сравнительно пониженіе годовой температуры при этомъ послѣднемъ условіи въ состояніи дать ледяной покровъ.

Уже эти немногочисленныя данныя свидѣтельствуютъ о колебаніи климата въ близкую намъ четвертичную эпоху, когда физическое состояніе земного шара не должно было бы отличаться отъ теперешняго. Каковы же причины этихъ колебаній?

Шведскіе ученые Арреніусъ и Экгольмъ видятъ причину этихъ колебаній, прежде всего, въ измѣняемости количества углекислоты въ воздухѣ. Углекислый газъ мало проводитъ теплоту отъ тѣлъ, слабо нагрѣтыхъ, какова, напр., поверхность земного шара,—и теплопрозраченъ для солнечныхъ лучей; благодаря этому, онъ играетъ для земного шара ту же роль, что стеклянныя рамы для оранжереи. Увеличеніе количества углекислоты должно содѣйствовать согрѣванію, уменьшеніе охлажденію. По вычисленію Арреніуса, при уменьшеніи углекислаго газа на $\frac{2}{3}$ его теперешняго количества, температура въ среднемъ упадетъ на 3°; при увеличеніи въ полтора раза, температура поднимется на $3^1/_2$°; для тройного количества углекислоты получимъ повышеніе температуры приблизительно на 9°.

Посмотримъ, какъ измѣняется количество углекислоты въ воздухѣ по гипотезѣ Экгольма. Когда земной шаръ, бывшій сна-

чала въ расплавленномъ состоянiи, охладился ниже критической температуры воды (365⁰) *), то дальнѣйшее охлажденiе пошло быстро. Болѣе холодная вода океана опускалась внизъ и охлаждала земную кору. Послѣдняя сжималась, образовывались трещины, по которымъ вода проникала внутрь земного шара, происходили вулканическiя изверженiя; постепенно кора становилась все толще, обмѣнъ тепла становился все медленнѣе. Наконецъ, установилось равновѣсiе температуры: верхнiе слои проводили къ океану столько тепла, сколько получали отъ нижнихъ. Поэтому трещинъ больше не образовывалось, вулканическая дѣятельность прекратилась. Но внутренность земного шара продолжала охлаждаться, вслѣдствiе чего объемъ внутренности земного шара долженъ былъ значительно уменьшиться сравнительно съ объемомъ коры; въ послѣдней образовались складки, т. е. горы. Какъ же эти процессы отразились на количествѣ углекислоты въ воздухѣ? При большой вулканической дѣятельности въ воздухъ попадало много углекислоты и, такъ какъ при этомъ почти весь земной шаръ былъ покрытъ водою и растительная жизнь была незначительна, то затрата углекислоты была мала; поэтому температура воздуха, земной коры и океана поднималась. Когда образовались первые материки и на нихъ возникла пышная растительность, вслѣдствiе обилiя углекислоты и, слѣдовательно, высокой температуры, то углекислота стала идти на образованiе растенiй и ея количество постепенно уменьшалось. Когда это уменьшенiе стало значительнымъ и температура понизилась, то явилось сжатiе коры по отношенiю къ ядру земного шара, произошли трещины, вулканическiя изверженiя, сопровождавшiяся выдѣленiемъ углекислоты, что, въ свою очередь, повело къ повышенiю температуры воздуха.

Такова въ общихъ чертахъ гипотеза Экгольма. Несмотря на свою заманчивость, чрезвычайное остроумiе въ разработкѣ деталей, она все же построена на довольно шаткихъ основанiяхъ; неудивительно поэтому, что противъ нея высказывается такой выдающiйся ученый, какъ Онгстремъ.

Другая причина колебанiя климата замѣчается, по мнѣнiю Экгольма, въ измѣненiяхъ наклоненiя эклиптики. Извѣстно, что уголъ наклоненiя эклиптики измѣняется, проходя изъ наименьшей величины въ наибольшую прибл. въ 20,000 лѣтъ; теперь наклоненiе среднее, черезъ 10,000 лѣтъ будетъ малое, а 9,000 лѣтъ тому назадъ было въ maximum'ѣ (больше теперешняго на 1⁰).

Чѣмъ болѣе наклоненiе эклиптики, тѣмъ теплѣе лѣто высокихъ широтъ, потому что полуденный уголъ паденiя солнечныхъ лучей больше, а день длиннѣе. Правда, зимою зато онѣ получаютъ менѣе тепла, но это обстоятельство имѣетъ мало значенiя:

---

*) Критической температурой газа или пара называется температура, выше которой тѣло не можетъ ни при какомъ давленiи обратиться въ жидкость.

зимой въ высокихъ широтахъ падаетъ такъ мало солнечнаго тепла, что уменьшеніе его при большомъ наклоненіи эклиптики почти не имѣетъ вліянія на климатъ. Обратно, уменьшеніе наклоненія эклиптики уменьшаетъ количество тепла лѣтомъ и увеличиваетъ его зимой; но первое условіе имѣетъ большое значеніе въ смыслѣ увеличенія суровости климата, второе проявляется весьма слабо. Въ результатѣ большое наклоненіе эклиптики къ экватору смягчаетъ климатъ высокихъ широтъ, а малое дѣлаетъ его болѣе суровымъ. Считая, что ежедневно земной шаръ получаетъ 720 калорій на кв. сант., Экгольмъ вычисляетъ въ калоріяхъ количество тепла, получаемое въ разныхъ широтахъ при наибольшемъ и наименьшемъ наклоненіи эклиптики. Переводя калоріи въ градусы, получимъ приблизительно слѣдующіе результаты: при maximum'ѣ наклоненія, бывшемъ 9000 лѣтъ назадъ, средняя температура лѣтняго полугодія была выше теперешней на 3,2° подъ 90° сѣв. шир., на 2,4° подъ 70° и на 1,3° подъ 55°; въ зимнее полугодіе пониженіе тепла подъ соотвѣтственными широтами было: 0°—0,4°—1°.

Эта часть ученія Экгольма заслуживаетъ болѣе довѣрія, чѣмъ первая. Здѣсь Экгольмъ стоитъ на твердой почвѣ данныхъ такой точной науки, какъ астрономія. Что наклоненіе эклиптики колеблется именно въ этихъ предѣлахъ и періодъ колебанія именно таковъ,—это не можетъ возбуждать сомнѣнія; измѣненіе количества солнечнаго тепла подъ вліяніемъ измѣненія наклоненія эклиптики также можетъ быть вычислено довольно точно; значительно труднѣе переводъ количествъ тепла въ калоріяхъ въ единицы, болѣе понятныя намъ—въ градусы термометра. Здѣсь могутъ быть неточности, но не вліяющія на выводы, къ которымъ приходитъ Экгольмъ.

Есть факты, подтверждающіе теорію шведскаго ученаго. Послѣ ледниковаго періода, надолго понизившаго температуру земного шара, постепенно установился на сѣверѣ болѣе теплый климатъ, чѣмъ теперь. Шведскій ботаникъ Андерсонъ, основываясь на растительныхъ остаткахъ въ Швеціи и Финляндіи, думаетъ, что тогда климатъ былъ теплѣе нынѣшняго на 2°. Періодъ этотъ былъ отъ 7000 до 10000 лѣтъ до нашего времени. Какъ видитъ читатель, эти данныя совпадаютъ съ выводами Экгольма.

На колебаніе климата оказываетъ вліяніе степень эксцентричности земной орбиты и положеніе земли во время лѣтнихъ и зимнихъ мѣсяцевъ въ перигеліи или въ афеліи. Извѣстно, что солнце не находится ровно въ центрѣ земной орбиты,—представляющей эллипсъ, хотя и весьма близкій къ окружности; поэтому земля бываетъ то ближе къ солнцу, то дальше; 1-го января нов. ст. земля бываетъ въ перигеліи, т. е. въ наименьшемъ разстояніи отъ солнца, а 2-го іюля въ афеліи, т. е. въ наибольшемъ разстояніи. Разность разстояній земли отъ солнца равна около 5 милл.

килом., вслѣдствіе чего въ перигеліи получается на $\frac{1}{15}$ болѣе солнечнаго тепла въ сутки, чѣмъ въ афеліи. Въ общей же сложности оба полушарія въ годъ получаютъ одинаковое количество тепла, но распредѣленіе его по временамъ года иное. Вслѣдствіе эксцентричности земной орбиты и положенія земли въ перигеліи 1-го января, т. е. въ зимній для нашихъ широтъ мѣсяцъ, зима въ сѣв. полушаріи короче зимы въ южномъ и тепла за это время въ сѣв. полушаріи получается больше, чѣмъ въ зимніе мѣсяцы въ южномъ.

Вслѣдствіе такъ называемой прецессіи (предваренія равноденствій) каждые 10,000 лѣтъ происходитъ перемѣщеніе перигелія на мѣсто афелія; наприм., въ XIV стол. земля была въ перигеліи въ день зимняго солнцестоянія, а черезъ 10000 лѣтъ, въ день зимняго солнцестоянія земля будетъ уже въ афеліи, а въ перигеліи будетъ въ день лѣтняго солнцестоянія.

Эксцентричность земной орбиты также не остается постоянной, и если теперь разность продолжительности зимы въ различныхъ полушаріяхъ всего $7^{1}/_{2}$ дней, то за 850 тыс. лѣтъ до нашего времени эта разница составляла 36 дней.

Посмотримъ, какъ должна отразиться на климатѣ эксцентричность орбиты совмѣстно съ положеніемъ земли въ афеліи и перигеліи, принимая maximum эксцентричности. Сѣверная зима въ перигеліи, лѣто въ афеліи, т. е. условія, сходныя съ нынѣшними, только болѣе рѣзко выраженныя: зима на сѣв. полушаріи короче и теплѣе нынѣшней, лѣто длиннѣе (продолжается 200 сутокъ), но менѣе тепло. На южномъ полушаріи зима длинная и холодная, лѣто жаркое, но короткое.

Сѣверная зима въ афеліи и лѣто въ перигеліи вызовутъ въ сѣверномъ полушаріи болѣе холодную и продолжительную зиму и болѣе короткое, но жаркое лѣто. Въ южномъ наоборотъ.

Извѣстный шотландскій геологъ Кролль кладетъ эти разсужденія въ основу своей теоріи климатовъ. Полушаріе, имѣющее зиму въ афеліи, будетъ имѣть зиму значительно болѣе длинную и холодную, чѣмъ теперь, и снѣга будетъ падать больше. Хотя при такихъ условіяхъ въ лѣтнія сутки получается болѣе тепла, чѣмъ теперь, но это обстоятельство не возстановитъ равновѣсія, потому что шероховатая поверхность снѣга разсѣиваетъ солнечные лучи; воздухъ они нагрѣваютъ мало, такъ какъ онъ бѣденъ водяными парами. Кромѣ того, лѣтомъ, благодаря таянію снѣга, образуются густые туманы, какъ это бываетъ теперь въ полярныхъ странахъ; эти туманы защищаютъ поверхность снѣга отъ солнечныхъ лучей. Поэтому къ осени каждаго года остается болѣе снѣга, чѣмъ въ предыдущую осень, постепенно образуются ледники и даже материковые ледяные покровы; а увеличеніе пространства, занятаго снѣгомъ, затруднитъ еще болѣе его таяніе.

Въ полушаріи, имѣющемъ зиму въ перигеліи, зима будетъ коротка и тепла, а лѣто, хотя и менѣе теплое, но зато болѣе

продолжительное; все это условія, благопріятныя для таянія снѣга. Поэтому количество снѣга постепенно уменьшается, что ведетъ къ болѣе сильному нагрѣванію поверхности, обстоятельству, заставляющему проявляться описаннымъ явленіямъ въ еще болѣе рѣзкой формѣ.

Авторъ разсматриваемой нами статьи, А. И. Воейковъ, соглашаясь до нѣкоторой степени съ соображеніями Кролля, дѣлаетъ и много возраженій. Онъ, напр., находитъ, что послѣдствіемъ таянія льда не должно являться обиліе тумановъ. На дальнѣйшихъ его возраженіяхъ, равно какъ и на вопросѣ о вліяніи, по Кроллю, измѣненія продолжительности и температуры зимы и лѣта на морскія теченія, мы не можемъ останавливаться за недостаткомъ мѣста.

Подводя итоги всему сказанному, нельзя не признать, что всѣ эти теоріи, особенно, первая изъ нихъ, далеко не могутъ претендовать на полноту и обоснованность; но все же онѣ заслуживаютъ большого вниманія, какъ первыя попытки къ рѣшенію такого труднаго и чрезвычайно сложнаго вопроса, какимъ представляется выясненіе причинъ измѣненія климата въ различныя эпохи существованія нашей планеты.

Н. О.

ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Лекціонные вѣсы проф. Шведова *).

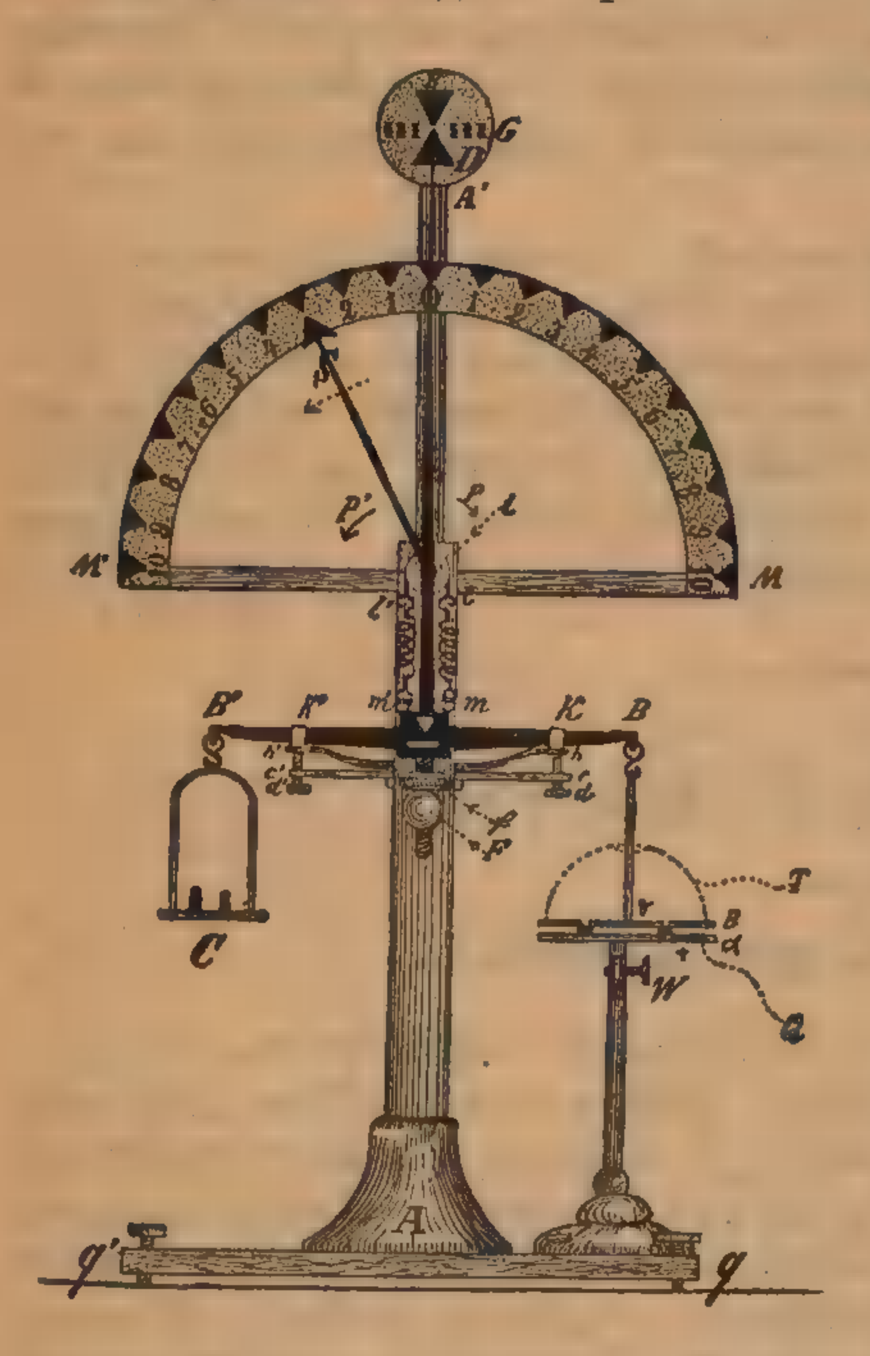
Преподавателямъ физики извѣстны тѣ неудобства, которыя приходится испытывать, употребляя лабораторные вѣсы для лекціонныхъ демонстрацій. Во-первыхъ, требуется много времени на подборъ мелкихъ разновѣсокъ, нужныхъ для уравновѣшиванія груза. Во-вторыхъ, съ отдаленныхъ мѣстъ аудиторіи не видны ни тѣ дѣленія, по которымъ движется стрѣлка вѣсовъ, ни сама стрѣлка, такъ что, послѣ томительнаго выжиданія, слушателямъ приходится принять на вѣру тотъ результатъ взвѣшиванія, который объявляется лекторомъ.

Предлагаемый ниже варіантъ рычажныхъ вѣсовъ даетъ возможность производить взвѣшиваніе быстро, съ точностью, достаточной для лекціонныхъ цѣлей, и при томъ производить такъ, что всѣ движенія частей инструмента, указывающія моментъ равновѣсія, видны со всѣхъ мѣстъ даже очень большой аудиторіи. Съ равнымъ удобствомъ эти вѣсы могутъ быть примѣнены для демонстрацій по измѣренію силъ электрическихъ, магнитныхъ и т. д.

---

*) Вѣсы были демонстрированы проф. Ѳ. Н. Шведовымъ въ засѣданіи физико-математическаго отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.—Описаніе ихъ напечатано во 2-омъ томѣ „Физ.-Мат. Ежегодника", откуда мы его заимствуемъ.

Вѣсы изображены на нашемъ рисункѣ. На горизонтальной деревянной доскѣ съ установочными винтами укрѣплена вертикальная колонна AA', поддерживающая коромысло BB' при посредствѣ призмы. На верхней сторонѣ коромысла, возможно близко къ его срединѣ, ввинчены два колечка m и m', въ которыя зацѣпляются концы двухъ спиральныхъ пружинокъ изъ тонкой ($d = 0{,}2$ *мм.*) стальной проволоки. Верхніе концы пружинъ соединены между собой тонкой металлической лентой (канитель), которая обвивается два раза вокругъ латуннаго цилиндра i, насаженнаго съ значительнымъ треніемъ на ось. Къ той же оси прикрѣплена стрѣлка S (черт. 1), вращающаяся по циферблату MM'. При вертикальномъ положеніи этой стрѣлки обѣ пружины натянуты одинаково, приблизительно до половины предѣла своей совершенной упругости. Но при вращеніи стрѣлки лента, навитая на цилиндръ i, перематывается въ одну сторону, вытягиваетъ одну изъ пружинъ болѣе, чѣмъ другую, и сообщаетъ коромыслу нѣкоторый моментъ вращенія. Положеніе коромысла опредѣляется стрѣлкой mD, наконечникъ которой стоитъ противъ значка E (намѣченнаго на неподвижномъ картонномъ кружкѣ) во время равновѣсія и отклоняется въ ту или другую сторону при нарушеніи равновѣсія. Длина стрѣлки mD около 30 ц. м., а сторона треугольныхъ наконечниковъ D, S и E около 3 ц. м., такъ что каждое движеніе стрѣлокъ ясно видно на разстояніи многихъ десятковъ метровъ.



Несмотря на громоздкіе размѣры описаннаго механизма, движенія коромысла остаются свободными отъ всякаго излишняго тренія и груза, такъ какъ единственную связь между коромысломъ и остальнымъ механизмомъ составляютъ стальныя пружинки, имѣющія ничтожный вѣсъ и, кромѣ того, поддерживаемыя собственнымъ натяженіемъ.

Въ отличіе отъ обыкновенныхъ вѣсовъ, арретирный механизмъ состоитъ изъ двухъ самостоятельныхъ частей, дѣйствующихъ отдѣльно на правое и на лѣвое плечо коромысла. Подвинчивая винтъ d, вращающійся въ неподвижной линейкѣ c, приподнимаемъ конецъ пружины h, а съ нимъ и вилку k, подпира-

ющую правое плечо, при чемъ лѣвое плечо коромысла можетъ остаться или свободнымъ, или тоже быть подпертымъ при помощи лѣваго арретира.

1. Выверка вѣсовъ. Предполагается, что вѣсы конструированы правильно, т. е. что при горизонтальномъ положеніи коромысла, свободнаго отъ всякаго посторонняго груза, стрѣлка D совпадаетъ съ E въ томъ случаѣ, когда и стрѣлка S совпадаетъ съ нулемъ своего циферблата, а длина пружинъ ml и $m'l'$ одинакова, по крайней мѣрѣ, приблизительно. Остается провѣрить одинаковость натяженія пружинъ. Для этой цѣли поворачиваемъ стрѣлку S сначала направо, а потомъ налѣво, на равное число дѣленій циферблата MM': тогда стрѣлка D должна отклоняться направо или налѣво тоже на равное число мелкихъ дѣленій, нанесенныхъ на кружкѣ G. Если бы это условіе не соблюдалось, то это указывало бы на неравенство въ натяженіи обѣихъ пружинъ. Поправить этотъ недостатокъ можно поворачиваніемъ цилиндрика i скольженіемъ на его оси въ ту или другую сторону, чѣмъ ослабится натяженіе одной изъ пружинокъ и усилится натяженіе другой до требуемаго предѣла.

Если бы при этомъ стрѣлка D смѣстилась въ сторону, то возстановить ея совпаденіе съ E можно вращеніемъ эксцентрическаго диска f, прикрѣпленнаго къ коромыслу снизу.

Провѣрка циферблата производится такъ:

Обѣ стрѣлки S и D предполагаются въ вертикальномъ положеніи. Накладываемъ на чашку B разновѣсокъ 1 гр., а для возстановленія положенія равновѣсія поворачиваемъ стрѣлку S влѣво, пока D и E не совпадутъ. Если для этого пришлось поворотить S до дѣленія 10 (десять дециграммовъ), то градуированіе циферблата правильно. Тогда для уравновѣшиванія, напр., трехъ дециграммовъ придется поворотить S до третьяго дѣленія, такъ какъ, въ предѣлахъ совершенной упругости, напряженіе пружинокъ измѣняется пропорціонально ихъ вытяженію. То же самое должно имѣть мѣсто при накладываніи груза на чашку B' и при вращеніи S вправо. Замѣтимъ, что дѣленія циферблата имѣютъ около 2 ц. м. длины и что поэтому подраздѣлить ихъ на глазомѣръ на десятыя доли легко даже издали, чѣмъ дается возможность опредѣлить перегрузку одного плеча сравнительно съ другимъ съ точностью до одного центиграмма.

II. Опредѣленіе вѣса тѣлъ. Если искомый вѣсъ груза не превышаетъ одного грамма, то поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Подперевъ арретиромъ правое плечо коромысла такъ, чтобы совпаденіе D и E не нарушалось, накладываемъ грузъ на правую чашку вѣсовъ и поворачиваемъ стрѣлку S влѣво, пока D не тронется съ мѣста влѣво. Дѣленіе циферблата, до котораго дошла S, покажетъ вѣсъ тѣла. Для провѣрки того, что это положеніе стрѣлки опредѣляетъ вѣсъ груза, можно отпустить правый арретиръ и показать, что стрѣлка D остается на нулѣ только при найденномъ положеніи S и перемѣщается вправо или влѣво при

малѣйшемъ поворотѣ S въ ту или другую сторону. Подобными же поворотами стрѣлки S можно сразу успокоить качанія коромысла, двигая ее синхронично съ этими качаніями, но въ противоположную сторону. Этимъ способомъ продолжительность взвѣшиванія сокращается до нѣсколькихъ секундъ.

Если искомый вѣсъ груза превосходитъ одинъ граммъ, то цѣлое число граммовъ искомаго вѣса опредѣляется накладываніемъ крупныхъ разновѣсковъ на чашки B', а остающееся число десятыхъ и сотыхъ долей грамма—поворотомъ стрѣлки S влѣво, пока D, стоявшая вертикально подъ дѣйствіемъ арретира α, не тронется влѣво.

3) Вѣсами этими очень удобно пользоваться для измѣренія во время лекцій электрическихъ притяженій, поверхностнаго натяженія и т. п.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Любопытная геометрическая теорема.

Въ № 2325 журнала „L'intermédiaire des mathématiciens" нѣкто Barisien предлагаетъ найти элементарное доказательство слѣдующей любопытной геометрической теоремы:

Черезъ середину J основанія BC равнобедреннаго треугольника ABC проведена произвольная прямая, которая встрѣчаетъ сторону AC въ точкѣ D и сторону AB въ точкѣ E. Показать, что DE > BC.

Въ послѣдней тетради „Извѣстій Казанск. Физ.-Мат. Общества" г. Е. Григорьевъ даетъ слѣдующее простое доказательство.

Примемъ, что точка D лежитъ на AC, а точка E на продолженіи AB. Очевидно, что всегда $EJ > DJ$. Замѣчая еще, что отношеніе площадей тр-ковъ BJE и CJD съ одной стороны равно $EJ:DJ$, а съ другой равно $BE:DC$, находимъ

$$\frac{EJ}{DJ}=\frac{BE}{DC},$$

а поэтому $BE > DC$. Проведемъ черезъ J параллель къ AC, черезъ C параллель къ DJ и, наконецъ, черезъ E параллель къ BC. Пусть двѣ послѣднія изъ трехъ проведенныхъ прямыхъ пересѣкаются съ первой соотвѣтственно въ точкахъ K и L. Такъ какъ $JL=BE$ и $JK=DC$, то точка K находится всегда между J и L, а потому и проэкція ея K' на сторону BC будетъ всегда лежать между J и точкой L' — проэкціей L на ту же сторону. По извѣстному свойству перпендикуляра, имѣемъ

$$BL > BL' \text{ и } CK > CK',$$

откуда

$$BL+CK > BL'+CK'.$$

Но, принимая во вниманіе, что $BL=EJ$ и $CK=JD$, находимъ

$$DE > BL'+CK$$

или

$$DE > BC+L'K', \text{ откуда } DE > BC,$$

что и требовалось доказать.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 304 (4 сер.). Даны окружность O и точка A. Провести двѣ хорды опредѣленной длины, BC и ED, такъ, чтобы онѣ пересѣкались подъ даннымъ угломъ и чтобы хорда EC проходила черезъ точку A.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 305 (4 сер.). Найти предѣлъ суммы безконечнаго ряда

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3.5}+\frac{3}{3.5.7}+\frac{4}{3.5.7\cdot 9}+\ldots$$

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 306 (4 сер.). Изъ данной точки M, лежащей внутри даннаго угла ABC, описать, какъ изъ центра, окружность, отсѣкающую отъ прямыхъ AB и BC отрѣзки, находящіеся въ данномъ отношеніи.

Г. Ѳедоровъ (Спб.).

№ 307 (4 сер.). Если сумма квадратовъ двухъ цѣлыхъ чиселъ есть точный квадратъ, то произведеніе этихъ чиселъ кратно 6.

(Заимств.).

№ 308 (4 сер.). Опредѣлить два простыхъ числа a и b, зная, что сумма всѣхъ дѣлителей числа 2^7ab равна $\frac{85}{28}$ числа 2^7ab.

(Заимств.).

№ 309 (4 сер.). Въ калориметръ, содержащій 39,6 граммовъ воды при 0^0, погружена металлическая проволока въ 10 метровъ длины, окруженная слоемъ льда въ 0,4 грамма. По этой проволокѣ пропускаютъ токъ силой въ 0,1 ампера въ продолженіе 1 часа 9 минутъ 30 секундъ. Каково должно быть сѣченіе проволоки, чтобы температура системы поднялась въ концѣ опыта до 0,1 градуса? Извѣстно, что сопротивленіе взятой проволоки равно 1 ому на каждый метръ длины и квадратный миллиметръ сѣченія. Теплоемкость ея 0,02 и плотность 18.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 214 (4 сер.). *Въ точкѣ* B *дуги нѣкотораго круга* AB *проведена касательная* BC. *Затѣмъ строятъ биссектрису* BC_1 *угла* ABC, *внутри котораго лежитъ дуга* AB, *биссектрису* BC_2 *угла* C_1BC, *биссектрису* BC_3 *угла* C_2BC *и т. д. до безконечности. Изъ точки* A *возставляютъ перпендикуляръ къ прямой* AB *до встрѣчи съ прямой* BC_1 *въ точкѣ* A_1; *изъ точки* A_1—*перпендикуляръ къ* A_1B *до встрѣчи съ прямой* BC_2 *въ точкѣ* A_2, *изъ послѣдней перпендикуляръ къ* A_2B *до встрѣчи съ* BC_3 *въ точкѣ* A_3 *и т. д., такъ что этимъ построеніемъ опредѣляется безконечный рядъ отрѣзковъ* A_1B, A_2B, ..., A_nB. *Доказать, что длина дуги* AB *есть предѣлъ отрѣзка* A_nB *при безконечномъ возрастаніи* n.

Обозначимъ черезъ O центръ дуги AB, черезъ r—радіусъ OA, черезъ a—мѣру угла AOB въ радіантахъ, черезъ P_n — периметръ правильной ломаной о 2^n сторонахъ, вписанной въ дугу AB. Каждая изъ сторонъ этой ло

маной равна $2r\sin\frac{a}{2^{n+1}}$. Поэтому

$$P_n = 2^{n+1} r \sin\frac{a}{2^{n+1}} \quad (1),$$

$$P_{n+1} = 2^{n+2} r \sin\frac{a}{2^{n+2}}$$

откуда

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{2\sin\frac{a}{2^{n+2}}}{\sin\frac{a}{2^{n+1}}} = \frac{2\sin\frac{a}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{a}{2^{n+2}}\cdot\cos\frac{a}{2^{n+2}}} = \frac{1}{\cos\frac{a}{2^{n+2}}},$$

$$P_{n+1} = \frac{P_n}{\cos\frac{a}{2^{n+2}}} \quad (2).$$

Полагая $n=0, 1, 2, \ldots$, находимъ изъ формулы (2):

$$P_1 = \frac{P_0}{\cos\frac{a}{2^2}} = \frac{AB}{\cos\frac{a}{2^2}}, \quad P_2 = \frac{P_1}{\cos\frac{a}{2^3}}, \quad P_3 = \frac{P_2}{\cos\frac{a}{2^4}}, \ldots \quad (3).$$

Но изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABA_1, A_1BA_2, A_2BA_3, ... $A_{n-1}BA_n$,—замѣчая, что по построенію $\angle ABA_1 = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a}{2^2}$, $\angle A_1BA_2 = \frac{1}{2}\angle A_1BA_1 = \frac{a}{2^3}, \ldots \angle A_{n-1}BA_n = \frac{a}{2^{n+1}}$, — имѣемъ (см. (3)):

$$A_1B = \frac{AB}{\cos\frac{a}{2^2}} = P_1 \ (4), \quad A_2B = \frac{A_1B}{\cos\frac{a}{2^3}} = (\text{см. } (4)) = \frac{P_1}{\cos\frac{a}{2^3}} = P_2.$$

Продолжая разсуждать такимъ же образомъ, находимъ послѣдовательно:

$$A_3B = \frac{A_2B}{\cos\frac{a}{2^4}} = \frac{P_2}{\cos\frac{a}{2^4}} = P_3, \ A_4B = P_4, \ldots, \ A_nB = P_n \quad (5).$$

Обозначая черезъ $\smile AB$ длину дуги AB, имѣемъ (см. (5)):

$$\smile AB = \lim_{n=\infty} P_n = \lim_{n=\infty} A_nB.$$

Г. Бубликъ (Сумы); *И. Плотникъ* (Одесса); *Н. С.* (Одесса).

№ 221 (4 сер.). 1) *Показать, что рѣшеніе задачи* № 214 (4 сер.) *можетъ быть сведено къ нахожденію предѣла, къ которому стремится произведеніе* $\cos\alpha.\cos\frac{\alpha}{2} \ldots \cos\frac{\alpha}{2^n}$, *гдѣ* α *есть данный уголъ, при безконечномъ возрастаніи* n. 2) *Если для дуги* AB *нѣкотораго круга сдѣлать рядъ построеній, указанныхъ въ задачѣ* № 214, *то предѣлъ площади перемѣннаго треугольника* OBA_n, *гдѣ* O—*центръ дуги* AB, *при безконечномъ возрастаніи* n, *есть площадь сектора* AOB. 3) *Если для дуги* AB *нѣкотораго круга по способу, указанному въ задачѣ* № 214, *найти рядъ точекъ* A_1, $A_2, \ldots, A_n$, *а также рядомъ аналогичныхъ построеній найти рядъ аналогичныхъ точекъ* $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ *для дуги, дополняющей дугу* AB *до полной окружности, то предѣлъ площади перемѣннаго четыреугольника* $A_nBA'_nO$, *гдѣ* O—*центръ дуги* AB, *при безконечномъ возрастаніи* n, *есть площадь круга, часть окружности котораго есть дуга* AB.

1) Изъ формулъ (3) и (5) предыдущей задачи находимъ:

$$A_2B = P_2 = \frac{P_1}{\cos\frac{a}{2^2}} = \frac{AB}{\cos\frac{a}{2^2}\cdot\cos\frac{a}{2^3}}, \quad A_3B = P_3 = \frac{AB}{\cos\frac{a}{2^2}\cdot\cos\frac{a}{2^3}\cdot\cos\frac{a}{2^4}}$$

и, вообще,

$$A_nB = \frac{AB}{\cos\frac{a}{2^2}\cdot\cos\frac{a}{2^3}\cdots\cos\frac{a}{2^{n+1}}} \quad \text{(A)}.$$

Изъ ряда тождественныхъ преобразованій

$$\cos\alpha.\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n} = \frac{\cos\alpha.\cos\frac{\alpha}{2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}\cdot\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\cos\alpha\ldots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{\alpha}{2^n}} =$$

$$= \frac{\cos\alpha\ldots\cos\frac{\alpha}{2^{n-2}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2^{n-2}}}{2^2\sin\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\sin2\alpha}{2^{n+1}\sin\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\sin2\alpha}{2\alpha}\cdot\frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}$$

заключаемъ, что предѣлъ разсматриваемаго безконечнаго произведенія при безконечномъ возрастаніи n равенъ $\frac{\sin2\alpha}{2\alpha}\cdot\lim\limits_{n=\infty}\frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}$, т. е. равенъ $\frac{\sin2\alpha}{2\alpha}$.

Поэтому, полагая $\alpha = \frac{a}{2^2}$, находимъ:

$$\lim_{n=\infty}\cos\frac{a}{2^2}\cdot\cos\frac{a}{2^3}\cdots\cos\frac{a}{2^{n+1}} = \frac{\sin2\frac{a}{2^2}}{2\cdot\frac{a}{2^2}} = \frac{2\sin\frac{a}{2}}{a},$$

откуда (см. (A))

$$\lim_{n=\infty} A_nB = \frac{AB.a}{2\sin\frac{a}{2}} \quad \text{(B)}.$$

Но $a = \frac{\smile AB}{r}$, поэтому (см. (B))

$$\lim_{n=\infty} A_nB = \frac{AB.\smile AB}{2r\sin\frac{a}{2}} = \smile AB.$$

Наоборотъ, рѣшеніе задачи № 214 даетъ возможность вычислить предѣлъ выраженія $\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}$ при безконечномъ возрастаніи n.

2) Площадь треугольника OBA_n равна $OB.A_nB.\sin\angle OBA_n$. Предѣлъ площади этого треугольника при безконечномъ возрастаніи n равенъ $OB.\lim\limits_{n=\infty}A_nB\,.\,\sin\left(\lim\limits_{n=\infty}\angle OBA_n\right)$. Но $\lim\limits_{n=\infty}A_nB = \smile AB$, какъ это показано выше, $\lim\limits_{n=\infty}\angle OBA_n = \angle OBC = \frac{\pi}{2}$, такъ какъ уголъ A_nBC есть величина безконечно малая при безпредѣльномъ возрастаніи n. Поэтому $\sin\left(\lim\limits_{n=\infty}\angle OBA_n\right) = 1$, и искомый предѣлъ равенъ $\frac{OB.\smile AB}{2}$, что и представляетъ собою площадь сектора AOB.

3) Предѣлъ площади перемѣннаго четыреугольника $A_nBA'_nO$, состоящаго изъ треугольниковъ OBA_n и OBA'_n, равенъ суммѣ предѣловъ площа-

дей треугольниковъ OBA_n и OBA'_n. Но предѣлъ площади треугольника OBA_n есть, какъ доказано выше, площадь сектора AOB, а предѣлъ площади треугольника OBA'_n есть площадь сектора, дополняющаго секторъ AOB до полнаго круга. Слѣдовательно,

$$\lim_{n=\infty} (\text{площ. } A_n BA'_n O) = K,$$

гдѣ K—площадь всего круга.

И. Плотникъ (Одесса); *Н. С.* (Одесса).

№ 230 (4 сер.). *Освободить выраженіе*

$$\frac{13\sqrt[3]{6}-6\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}\right)}{3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{9}}$$

отъ ирраціональности въ знаменатель.

(Заимств. изъ *Casopis*).

Сокративъ данную дробь на $\sqrt[3]{6}$, получимъ

$$\frac{13-2\sqrt[3]{12}-2\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{18}+1-\sqrt[3]{12}} \quad (1).$$

Для рѣшенія предложенной задачи полезно замѣтить, что выраженіе $x^3+y^3-z^3+3xyz$ дѣлится безъ остатка на $x+y-z$, и въ частномъ получается $x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz$, откуда вытекаетъ тожество

$$x^3+y^3-z^3+3xyz=(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz) \quad (2).$$

Помножимъ числителя и знаменателя дроби (1) на

$$\left(\sqrt[3]{18}\right)^2+1^2+\left(\sqrt[3]{12}\right)^2-\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{18.12}+\sqrt[3]{12}.$$

Тогда, положивъ въ тожествѣ (2) $x=\sqrt[3]{18}$, $y=1$, $z=\sqrt[3]{12}$, найдемъ, что знаменатель дроби (1) обратится въ $\left(\sqrt[3]{18}\right)^3+1-\left(\sqrt[3]{12}\right)^3+3\sqrt[3]{18.12}$, или въ $18+1-12+18=25$. Числитель же даетъ (см. (2))

$$\left(13-3\sqrt[3]{12}-2\sqrt[3]{18}\right)\left(3\sqrt[3]{12}+1+2\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{18}+6+\sqrt[3]{12}\right)=$$

$$=\left(13-3\sqrt[3]{12}-2\sqrt[3]{18}\right)\left(7+4\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{18}\right)=25+25\sqrt[3]{12}-25\sqrt[3]{18}.$$

Итакъ, предложенная дробь равна

$$\frac{25+25\sqrt[3]{12}-25\sqrt[3]{18}}{25}=1+\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{18}.$$

И. Плотникъ (Одесса); *Г. Огановъ* (Эривань); *Н. Готлибъ* (Митава); *Л. Ямпольскій* (Одесса); *Г. Томанъ* (Уфа); *Я. Сыченковъ* (Орелъ); *Г. Бубликъ* (Сумы); *М. Виторгонъ* (Казань); *Н. Куницынъ* (Усть-Медвѣдица).

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 25-го Февраля 1903 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.